小向的試煉 Vol. 3 題解

hansonyu123

1 飛 (Fly)

最直接的想法應該是暴搜 (x, y) 的所有可能再看看 z 是不是整數。然而暴搜的最大困難點是不知道應該暴搜的範圍有多大。Subtask 2 跟 Subtask 3 分別用兩種方法看範圍，而 Subtask 4 則用巧妙的整理技巧化簡問題。

1.1 Subtask 1

既然 $n \leq 3$，那就任人宰割啦。隨便暴搜，預處理都 ok。這樣就有 8 分了。

1.2 Subtask 2

因為 $x \leq y \leq z$，所以

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$$

也就是說 $n + 1 \leq x \leq 3n$。這樣就知道 x 的搜尋範圍了。

至於 y 的範圍，同上面的想法可以知道

$$y \leq \frac{2nx}{x-n} \leq 6n^2$$

所以暴搜的複雜度就是 $O(n^3)$，這樣就有 28 分了。

1.3 Subtask 3

如果在計算 y 的範圍的時候不偷懶，那麼要搜的 (x, y) 對數就有

$$\sum_{x=n+1}^{3n} \frac{2nx}{x-n} \leq 6n^2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}$$

所以如果對於每個 x，y 都只搜到 $2nx/(x-n)$ 為止的話，複雜度就降為 $O(n^2 \log n)$，如此可獲得 52 分。

1.4 Subtask 4

上面的暴搜已經是很省時間的暴搜了，然而還是過不了 Subtask 4，所以需要再想個好一點的方法。既然前面暴搜 (x, y) 失敗了，能不能只枚舉 x 呢？也就是說，已知 $(x-n)/xn$，需要找到 (y, z) 使得

$$\frac{x-n}{xn} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

通分移項得到

$$(x-n)yz - xn(y+z) = 0$$

為了能因式分解，兩式同乘 $(x-n)$ 後再同加 x^2n^2 得到

$$((x-n)y - xn)((x-n)z - xn) = (x-n)^2yz - xn(x-n)(y+z) + x^2n^2 = x^2n^2$$

所以只要枚舉所有的 x^2n^2 的因數就可以解出對應的 (y, z) 了。需要注意的是，要考慮一下是否要枚舉負因數。不過在本題剛好不用，因為若兩者皆為負，那麼因為 $x-n>0$，

$$(xn - (x-n)y)(xn - (x-n)z) < xn \times xn = x^2n^2$$

即得到一個矛盾。

為了快速枚舉因數，先用 $O(3n)$ 的時間找出所有數的最小質因數 (這個用線性篩法可以做到)，再對每個 x 都用 $O(\log x)$ 的時間找出他的質因數分解式，用 $O(\log n)$ 的時間把他和 n 的質因數分解式合併乘以二就找到 x^2n^2 的分解式。接著只需要用 $O($ 因數個數 $)$ 的時間枚舉因數驗證 y, z 是否為整數且 $x \le y \le z$ 是否被滿足。因數個數的複雜度很難估，不過不難想像他小於 10^4，所以這樣子的時間複雜度是可接受的。

總時間複雜度 $O(n(\log n +$ 因數個數 $))$，便可解決此題。

實際上複雜度遠比 $O(n^2)$ 還來得小。之所以只出到 10^4 是為了避免 x^2n^2 超過 long long 範圍。

2 Palembang Bridges

首先不難發現不用過河的人對這個題目的影響是固定的，可以分別計算。再來，對於所有需要過橋的人，他們走橋的距離也是一樣的，所以也同樣可以分開計算。因此，我們

可以把題目化約成給定 $a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N$，要怎麼選定橋的位置 $c_1, \ldots, c_K$ 使得

$$\sum |a_i - c_{d_i}| + |b_i - c_{d_i}|$$

最小，其中 $d_i = 1, \ldots, K$ 代表第 i 個人選擇要過的橋。

2.1 Subtask 1

對於 $K = 1$ 的情況，整個東西就是 c_1 的函數。不難看出這個函數是一個折線圖，僅在 a_i 或 b_i 曲折。所以最小值一定發生在其中一個 a_i 或 b_i。暴搜這些可能性即可。複雜度 $O(N^2)$，便可獲得 8 分。

2.2 Subtask 2

相信大家都在高中的數學課證明過 (?) 這個函數在 c_1 是 $a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N$ 的中位數時會是最小的。所以只需要用 $O(N \log N)$(排序) 或 $O(N)$(nth_element) 就可以解決了。這樣便可以拿到 22 分。

至於證明方法大略就是，如果 c_1 不是中位數的話，不妨設他比較左邊。如此一來，在右邊的人比在左邊的人多，所以 c_i 往右靠一點點函數值就會更小。

2.3 Subtask 3

同 Subtask 1，將兩座橋的任一座固定時，另一座橋在某一個 a_i, b_i 的時候會達到最小。所以直接暴搜兩座橋的位置就可以得到一個 $O(N^3)$ 的作法。這樣可以拿到 9 分 (加上 Subtask 1 是 17 分)。

2.4 Subtask 4

如果我能做到：給定兩座橋的位置，馬上知道哪些人走 1 號橋比較好，哪些人走 2 號橋比較好，對整題或許會有幫助。所以我們要來思考 $|a_i - c_1| + |b_i - c_1|$ 以及 $|a_i - c_2| + |b_i - c_2|$ 的大小關係如何確定。

把 c_j 在 a_i, b_i 之間以及之外這兩個情況分開討論，不難發現

$$|a_i - c_j| + |b_i - c_j| = 2\max(|m_i - c_j|, |m_i - a_i|)$$

其中 m_i 是 a_i, b_i 的中點。因此，橋的位置離中點越近，這個值就越小。也就是說，對於一組 a_i, b_i，他們選離中點近的橋走不會更差。因此我們可以將所有點的中點排列，並指

定 (枚舉) 讓中點在某個位置 X 的左邊的人都走一號橋，在某個位置的右邊的人都走二號橋。於是問題便轉化為一座橋的問題。如此一來總複雜度便是 $O(N^2 \log N)$(排序) 或者 $O(N^2)$(nth_element)。這樣就可以拿到 63 分。

2.5 Subtask 5

如果我們枚舉 X 的方法是好好枚舉的方法，比如說由小到大枚舉，那麼不難發現問題轉化為：每次減少 (增加) 兩個數，快速求出所有數的中位數。處理這個問題的方法非常多：你可以直接使用排名樹 (比如 treap)，也可以使用一個 min-heap 儲存較大的那一半，用一個 max-heap 儲存較小的那一半 (雖然這樣做只支援增加兩個數，但是只要先把 X 由小到大枚舉，再把 X 由大到小枚舉就可以用增加替代減少)。不管是哪個，總複雜度都是 $O(N \log N)$。

事實上還有一個三分搜的方法，不過既然都想到對中點排序以及找中位數了，不如使用上面的作法比較直覺一點。

本題需要將所計算的值在

$$\sum |a_i - c_{d_i}| + |b_i - c_{d_i}| = \sum 2 \max(|m_i - c_{d_i}|, |m_i - a_i|)$$

兩種表示法之間靈活轉換，值得大家好好思考。

3 鑰匙 (Key)

3.1 Subtask 1

直接模擬排序即可。複雜度 $O(MN \log N)$(sort) 或 $O(MN)$(counting sort)。24 分只需要這樣就可以拿到了。

3.2 Subtask 2

眼尖的人應該會發現，counting sort 相當於數區間內有幾個 a，把 a 先填前面/後面，剩下的填 b。因此只需要開一個線段樹，記錄該區間內有幾個 a，那麼排序一個區間就是區間查詢以及區間修改。利用懶人標就可以達成這些要求。複雜度 $O(N + M \log N)$。這樣就有 36 分。

3.3 Subtask 3

如果發現 Subtask 2 的作法，那麼 Subtask 3 也就不難了。只要開 26 棵線段樹，在每次排序的時候都從 a 開始數區間內有幾個，再從前面/後面填 a。下一個字元只要接著前一個字元填的地方繼續填就好了。所以這些就只是 26 棵線段樹的區間查詢和區間修改，同樣用懶人標就可以達成要求。複雜度 $O(26(N + M\log N))$ 便可通過這題所有測資。

另一個作法很簡單。我們可以將原本的序列分成一堆區間，每個區間都是遞增或遞減排列。如此一來，對於每個區間，我們只在意他是遞增還是遞減，以及裡面有幾個 a, 幾個 b,..., 幾個 z。一開始可以視為每個字母都獨立成為一個區間。而每次排序時，只需要看這次影響到的有哪些區間，數一下這些區間內的 a 到 z 有幾個，再將這些區間移除，增加新的區間。因此可以考慮使用 map。

如此一來，不難發現每次操作所增加的新區間至多三個 (左邊的渣渣，右邊的渣渣以及自己)，而且每個區間只會被計算以及移除一次。因此總時間複雜度為 $O((26 + \log N)(N + M))$，略好於前一種作法。