

2017 年建中資訊校內第三次模擬賽題解

waynetuinfor, Tau

2017 年 12 月 13 日

1 盪鞦韆之心 國人皆知

1.1 Subtask 1, 2

$K = 1$ 時只要看加起來有沒有 R 就好了。

$K = 2$ 時假設第一天刷到第 p 題，樂趣為

$$\sum_{i=1}^p (C - i)d_i + \sum_{i=p+1}^N (C - i + p)d_i$$

預處理 d_i 的前綴及 $d_i \times i$ 的前綴，再枚舉 p 即可。

1.2 Subtask 3, 4

枚舉 l 代表最長的天數，令 $dp[i][j]$ 代表前 i 天把前 j 題寫完的最大樂趣：

$$dp[i][j] = \max_{i-p \leq l} \{dp[i-1][p] + f(p+1, j)\}$$

$f(l, r)$ 可以預處理前綴 $O(1)$ 求得，複雜度 $O(N^3K)$ 。

長度其實可以二分搜，複雜度 $O(N^2K \log N)$

1.3 Subtask 5

觀察後可以發現轉移來源有單調性，因此維護一個長度為 l 的容器儲存可行的轉移來源，轉移時在裡面二分搜即可，複雜度 $O(NK \log^2 N)$ 。

1.4 Subtask 6

把 DP 式展開（令 s_i 為 d_i 的前綴、 x_i 為 $d_i \times i$ 的前綴）

$$\begin{aligned} dp[i][j] &= \max_{i-p \leq l} \left\{ dp[i-1][p] + \sum_{t=p+1}^j (C-t+p)d_t \right\} \\ &= \max_{i-p \leq l} \left\{ dp[i-1][p] + C(s_j - s_p) - (x_j - x_p) + p(s_j - s_p) \right\} \\ &= Cs_j - x_j + \max_{i-p \leq l} \left\{ ps_j + dp[i-1][p] - Cs_p + x_p - s_p \right\} \end{aligned}$$

為 j 的線性函數，套用斜率優化，複雜度 $O(NK \log N)$ 。實作上需注意淘汰直線時要考慮元素過期的時間。

2 整棘虞過街 人人喊打

2.1 Subtask 1

大暴力

2.2 Subtask 2

帶修改的莫隊 (?)， $O(N^{\frac{5}{3}})$

2.3 Subtask 3

把屏障以及雷射光分開做，對於屏障可以使用一般的莫隊或持久化線段樹。

將雷射光以及詢問都照右界排序，假設現在要處理右界是 r 的詢問們，則將右界 $\leq r$ 的雷射光全部照左界丟入 BIT 或線段樹裡，便可以轉成區間和，總複雜度 $O(Q \log N)$ 或 $O(Q \log N + N\sqrt{Q})$ 。

2.4 Subtask 4

上一個 Subtask 處理的是靜態的二維偏序問題，現在有修改只要把時間當成新的維度對他做操作分治即可。

可以發現每一個屏障有效的區間就是從他自己的位置一直到下一個相同的屏障為止，因此也可以用跟鐳射光差不多的想法處理，維護 set 記錄每種屏障的出現位置，一次修改只會動到相同屏障前後兩個，一樣套用操作分治，複雜度 $O((N+Q) \log^2 N)$ 。

3 整棘麋在做弢哥在看

首先建圖，可以用 Trie 找到跟某個數 Xor 起來前 k 大的數字是誰，所以建圖的複雜度是 $O((\sum L_i + \sum R_i) \log \max a_i)$ 。有向圖中強連通分量內任兩點皆有路徑，所以把強連通分量縮為一點，點權為包含的每個點的權值和，縮完點後得到一張 DAG，在上面 DP 即可。

4 尋找蘿莉第 3.1 彈

4.1 Subtask 1

人不暴力，天誅地滅 by Tau

4.2 Subtask 2

注意到把一個 $(\pm 1, \pm 1 \dots, \pm 1)$ 的蘿莉的一些分量修改為 0 相當於把這個蘿莉減掉某個 $(\pm 1, \pm 1 \dots, \pm 1)$ 的蘿莉後再除以 2。考慮建圖，我們把這兩個蘿莉連邊，所以就會變成 n 個點 n 條邊的圖（允許重邊）

$$\text{所有修改後的蘿莉和為 } 0 \rightarrow \sum \text{原始蘿莉} = \sum \text{被連邊的蘿莉}$$

裡面必存在一個環，而當我們取環上所有邊代表的蘿莉，就會得到 $\sum \text{原始蘿莉} = \sum \text{被連邊的蘿莉} = \sum \text{環上的蘿莉}$ ，即為所求。